CHAPITRE

8 Probabilités



Le mot *hasard* vient de l'arabe *al zhar* qui désigne un dé à jouer.

Les jeux de hasard sont connus depuis la plus haute Antiquité. Déjà les romains et les grecs jouaient aux osselets (des *astragales*).

C'est l'étude de ces jeux de hasard qui a conduit Pierre de Fermat(1601-1665) et Blaise Pascal (1623-1662) à s'intéresser au calcul des probabilités.

Ainsi la personne qui joue au LOTO, qui choisit 6 numéros sur une grille qui en comporte 49, attend avec impatience le jour du tirage pour savoir s'il a gagné. On montre qu'il y a 13 983 816 manières différentes de choisir 6 numéros parmi les 49 proposés sur la grille.

Chacun des six numéros est choisi au hasard par un appareil.

Ce joueur a donc une chance sur 13 983 816 de gagner le gros lot s'il n'a rempli qu'une grille

On rencontre les probabilités dans la vie quotidienne mais aussi dans différents domaines tels les sondages d'opinion, dans les calculs effectués par les compagnies d'assurance, en économie, en démographie, dans l'étude des réseaux de communication, en météorologie, chaque fois que l'on essaie de mesurer un risque.

Le calcul des probabilités introduit les mathématiques dans le hasard.

On l'utilise pour modéliser une situation dont on a fait une analyse statistique.

Les notions étudiées dans ce chapitre

1. Expérience aléatoire
2. Loi de probabilité
3. Probabilité d'un événement
4. Espérance, variance et écart-type
5. Variable aléatoire

Avant de commencer,
TESTEZ-VOUS !

Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).

A. Savez-vous… utiliser des fréquences ?

On lance un dé à six faces, 100 fois. Le tableau fournit la fréquence de chacun des numéros.

N°	1	2	3	4	5	6
f_i	0,19	0,20	0,13	0,14	0,16	0,18

	A	B	C	D
1. La fréquence de l'événement « obtenir un nombre multiple de 3 » est	0,31	0,5	0,333	$\frac{1}{3}$
2. La fréquence de l'événement « obtenir un nombre strictement supérieur à 3 » est	0,48	0,5	0,61	0,13
3. La fréquence de l'événement « obtenir un nombre au moins égal à 2 » est	0,81	0,19	0,61	0,20
4. La moyenne de la série est	3,5	3,42	0,176	0,57
5. La variance de la série est	14,88	1,782	3,1836	2,7714

B. Savez-vous… calculer des proportions ?

Un club sportif propose à ses 200 adhérents plusieurs activités dont la natation et le tennis.

110 pratiquent la natation, 70 le tennis et 36 les deux activités.

6. La proportion des adhérents pratiquant les deux activités est	0,25	0,18	0,75	0,36
7. La proportion des adhérents pratiquant au moins l'une de ces deux activités est	0,75	0,90	0,72	0,54
8. La proportion des adhérents pratiquant un seul de ces deux sports est	0,75	0,54	0,50	0,46
9. La proportion des adhérents ne pratiquant aucune de ces deux activités	0,28	0,25	0,54	0,72
10. La proportion des adhérents qui ne pratiquent pas la natation est	0,50	0,17	0,28	0,45
11. La proportion des adhérents qui ne pratiquent que le tennis est	0,17	0,35	0,25	0,50
12. La proportion des adhérents qui ne pratiquent que la natation est	0,55	0,18	0,37	0,5
13. La proportion des adhérents qui ne pratiquent pas le tennis est	0,35	0,5	0,65	0,28

Réponses page 350

Découvrir

Activité 1 Familles

On a relevé le nombre d'enfants de 300 familles. Voici les résultats obtenus :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5
Nombre de familles	54	141	60	18	12	15

1. Calculer la fréquence de chacune des catégories de famille.
Calculer la somme des fréquences obtenues.

2. Quelle est la fréquence de l'événement « La famille a plus de 2 enfants » ?

3. Calculer la fréquence de l'événement « La famille a moins de 3 enfants » ?

4. Donner deux façons de calculer la fréquence de l'événement « La famille a au moins deux enfants ».

5. Calculer le nombre moyen d'enfants par famille.
Déterminer la variance et l'écart type de la série des fréquences précédentes.

Activité 2 Lancers de deux dés

On lance deux dés : on s'intéresse à la somme des deux nombres obtenus.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre cette somme ?

2. On se propose de simuler, à l'aide de la fonction « random » d'une calculatrice l'expérience précédente. Le tableau ci-dessous rappelle le mode d'emploi de différents modèles de calculatrices.

	Avec TI-82-83	**Avec CASIO 25-35-65-100**
Pour obtenir la partie entière d'un réel	Dans le menu MATH suivi de NUM utiliser la commande Int	Dans le menu OPTN suivi de NUM utiliser la commande Int
Pour générer un nombre de 0 à n	Dans le menu MATH suivi de PRB utiliser la commande **Rand**	Dans le menu OPTN suivi de PRB utiliser la commande **Ran #**

Quelle séquence permet de simuler le calcul de la somme des nombres obtenus ?
Donner, sous forme d'un tableau, la distribution des fréquences correspondant à 50 lancers de deux dés obtenus par simulation.

3. Recommencer une nouvelle série de 50 lancers de deux dés, par simulation et donner la distribution des fréquences de la série de 100 lancers obtenue en regroupant les deux séries précédentes.

4. Calculer ces fréquences pour la série suivante de 1 000 lancers des deux dés.

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de fois	22	59	90	115	134	171	127	111	90	56	25

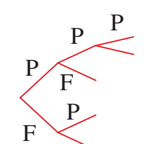
5. Recopier et compléter ce tableau de 36 cases qui indique toutes les sommes possibles que l'on peut obtenir en lançant deux dés. Les lancers (1 ; 5) ; (2 ; 4) donnent la somme 6.
Sur les 36 lancers possibles, la somme 6 apparaît 5 fois : la fréquence correspondante est donc 5/36 soit environ 0,139 : comparer aux fréquences obtenues ci-dessus. Au vu de ce tableau, calculer pour chaque somme la fréquence d'apparition à laquelle on peut s'attendre.

	1	2	3	4	5	6
1					6	
2				6		
3						
4						
5						
6						

Activité 3 Lancer des pièces

On lance une pièce de 1 euro trois fois de suite et à chaque lancer, on note P pour « pile » et F pour « face ».

1. Au premier lancer, on a deux possibilités : P ou F. Au second, de même : P ou F etc. À chaque issue correspond un chemin sur l'arbre. On note PFP l'issue correspondant à la succession Pile, Face, Pile. En complétant l'arbre ci-contre, donner l'ensemble Ω de toutes les issues possibles.



2. Soit A l'événement « *obtenir exactement 2 fois Pile* ». Écrire les issues qui réalisent l'événement A. Si la pièce est bien équilibrée, combien a-t-on de « chances » d'obtenir l'événement A ?

3. On simule, à l'aide d'un tableur, 100 fois l'expérience qui consiste à lancer trois fois de suite une pièce de 1 euro.
Le tableau suivant donne les résultats obtenus pour quatre fois 100 lancers. On a aussi indiqué le total pour les 400 lancers.

Échantillon	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
N° 1	5	8	11	16	17	13	17	13
N° 2	8	12	13	19	12	8	11	17
N° 3	14	8	11	12	10	8	27	10
N° 4	15	18	8	9	10	10	10	20
Total	42	46	43	56	49	39	65	60

Calculer la fréquence d'apparition de l'événement A dans chacun des échantillons puis dans le total qui constitue un échantillon de 400 lancers.

4. Comparer les fréquences obtenues avec le résultat de la question 2.

5. On considère maintenant le jeu suivant : Le joueur lance une pièce trois fois de suite. Il gagne 5 euros s'il obtient exactement deux fois Pile, et perd 2 euros dans les autres cas. Pour chacun des quatre échantillons, calculer la somme gagnée ou perdue à la fin des cents parties.
Et pour le total de 400 ?

Activité 4 Joindre les points

On considère les 5 points A, B, C, D et E dessinés ci-contre : ce sont les sommets d'un polygone convexe $ABCDE$.

1. Combien peut-on tracer de segments joignant A à l'un des autres points ?

2. Combien peut-on tracer de segments joignant deux de ces points ? (Ne pas oublier que [AB] et [BA] sont un seul et même segment.)

3. On écrit le nom de chacun des 10 segments sur un carton et on met ces cartons dans un sac. On tire au hasard un carton du sac.
Combien a-t-on de « chances » de tirer une diagonale du polygone $ABCDE$?
Et un côté ? Et un segment dont C est une extrémité ?
Et un segment dont D est une extrémité ?

le Cours

1. Expérience aléatoire

Vocabulaire

Alea est un mot latin signifiant « jeu de dé », « hasard ».

Technique

Pour simuler on peut utiliser :
– une table de nombres au hasard ;
– la touche RANDOM d'une calculatrice ;
– un tableur avec la fonction ALEA ;
– des urnes contenant des boules de couleurs différentes, etc.

Définition

Une *expérience aléatoire* est une expérience qui peut conduire à plusieurs *issues*, e_1, e_2, ... e_r ; une seule issue se réalise sans que l'on puisse la prévoir à l'avance.

Simuler une expérience, c'est produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience.

Distribution de fréquences

On répète n fois l'expérience dont les issues sont $e_1, e_2, \ldots e_r$.
Pour chacune des issues possibles, on calcule ses fréquences : $f_1, f_2, \ldots, f_r$.
La distribution de fréquences est l'ensemble $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$.
Chaque fréquence est comprise entre 0 et 1 : $0 \leqslant f_i \leqslant 1$.
La somme de ces fréquences est 1 : $f_1 + f_2 + \cdots + f_r = 1$.
Si l'événement A est réalisé pour les issues e_1, e_2 et e_3, la fréquence de l'événement A est égale à $f_1 + f_2 + f_3$.

2. Loi de probabilité

On envisage des expériences ne comportant qu'un **nombre fini** d'issues possibles. Pour une expérience donnée, désignons par Ω l'ensemble de toutes les issues possibles : $\Omega = \{e_1; e_2; \ldots; e_r\}$.

Définition

On définit une **loi de probabilité** sur Ω si à chacune des issues $e_1, e_2, \ldots, e_r$ d'une expérience aléatoire on associe un réel $p_1, p_2, \ldots, p_r$, avec les propriétés suivantes : pour tout i : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $\sum p_i = 1$.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité.
Pour une même expérience, plusieurs modèles sont possibles.
Ainsi lorsqu'on lance une pièce, on peut envisager les modèles :
– obtenir Pile avec la probabilité 0,5 et Face avec la probabilité 0,5,
– ou Pile avec la probabilité 0,25 et Face avec la probabilité 0,75
On a vu en Seconde que, si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois, les fréquences tendent à se stabiliser. La simulation de l'expérience précédente va donc permettre de valider le premier modèle.

Histoire

C'est Jacques Bernoulli (1654-1705) qui énonça le premier, cette propriété importante qui établit un lien entre les statistiques et le calcul des probabilités.

Loi des grands nombres

Si l'on répète n fois la **même** expérience de manière indépendante, dans les mêmes conditions, une loi de probabilité étant définie, si n tend vers l'infini, la fréquence d'une issue tend vers la **probabilité** de cette issue.

La distribution des fréquences $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ tend vers la loi de probabilité $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$.

des Méthodes

Simuler une expérience

Énoncé

Un sac opaque contient 20 boules bleues, 20 rouges et 60 vertes On tire une boule au hasard, on note sa couleur et on la remet dans le sac.

1. Simuler cette expérience, à l'aide d'une calculatrice.

2. Fournir un échantillon de taille 50 de cette expérience puis déterminer la distribution des fréquences associée à cet échantillon.

3. Produire quatre autres échantillons de même taille. Donner la distribution des fréquences pour les 250 tirages précédents.

4. Quelle loi de probabilité est associée à cette expérience ?

Méthode

Pour simuler avec une calculatrice, utiliser la fonction RANDOM attachée à votre modèle.

Solution

1. Il faut trouver une façon de tirer les nombres aléatoires donnés par la fonction RANDOM de la calculatrice pour que la répartition (20-20-60) ou encore (1-1-3) soit respectée. On obtient un nombre de 1 à 5 en procédant ainsi :

– Avec TI 82-83, taper la séquence : Int(Rand x 5+1).

– Avec CASIO 25-35-65-100, taper la séquence Int(Rand # x 5+1).

On décide que si le nombre obtenu est 1, la boule est bleue ; s'il est 2 la boule est rouge ; s'il est 3, 4 ou 5, la boule est verte.

On dénombre ensuite les apparitions du chiffre 1, puis du chiffre 2 et on additionne celles de 3, 4 et 5.

La simulation peut être effectuée à l'aide d'un tableur. Voir page 198.

2. Voici un échantillon de taille 50 et la distribution associée pour cette expérience.

	Bleue	**Rouge**	**Verte**
Effectif	6	14	30
Fréquence	0,12	0,28	0,60

3. Le tableau ci-contre indique les fréquences pour quatre nouveaux échantillons de taille 50.
Sur cinq échantillons concernant la même expérience, on remarque une fluctuation de la distribution des fréquences.

B	**R**	**V**
0,18	0,22	0,60
0,16	0,18	0,66
0,28	0,16	0,56
0,20	0,22	0,58

En rassemblant les cinq échantillons, la fréquence d'apparition d'une boule bleue est 0,188. En effet le nombre total de boules bleues obtenues est égal à :

$50 \times (0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}16 + 0{,}28 + 0{,}20)$ soit 47.

La fréquence correspondante est donc égale à $\frac{47}{250}$, soit 0,188.

De même la fréquence d'apparition d'une boule rouge est 0,212 et celle d'une boule verte est 0,60.

4. Les proportions des couleurs dans le sac sont respectivement : 0,2, 0,2 et 0,6. Il n'est pas étonnant – c'est la loi des grands nombres – que la distribution des fréquences se « rapproche » de cette répartition.

La loi de probabilité associée à cette expérience est donnée dans le tableau ci-contre.

	B	**R**	**V**
Probabilité	0,2	0,2	0,6

le Cours

3. Probabilité d'un événement

Soit Ω l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Vocabulaire

$A \subset \Omega$ se lit « A inclus dans Ω »

$\bar{A}$ se lit « A barre ».

Définitions

• Un **événement** A est une partie de Ω : on écrit $A \subset \Omega$.
Si $A = \{e_2 ; e_5\}$, on dit que e_2 et e_5 réalisent A, ou sont favorables à A.
L'événement *contraire* de A, est constitué des issues qui ne sont pas dans A : on l'écrit $\bar{A}$.
Un *événement élémentaire* ne comporte qu'une issue : exemple : $\{e_2\}$; $\{e_7\}$.
Si A et B sont deux événements :
– l'événement (**A ou B**) noté $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des deux événements est réalisé ;
– l'événement (**A et B**) noté $A \cap B$ est réalisé si A et B sont réalisés tous les deux.
• Soit P une loi de probabilité définie sur Ω. La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires réalisant A.

Vocabulaire

$\varnothing$ est l'événement impossible.
Ω est l'événement certain.
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont **incompatibles.**

Propriétés

1. $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$ et, pour tout événement A, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
2. Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. Si A et B sont quelconques $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Pour deux événements contraires A et $\bar{A}$ on a $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Démonstrations

La propriété **1.** résulte des définitions. Pour la propriété 3, voir exercice 60.

2. Soit $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ et $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$. On a $P(A) = p_1 + \cdots + p_s$ et $P(B) = p'_1 + \cdots + p'_r$.

$A \cup B = \{a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_r\}$ puisque A et B sont sans éléments communs.

D'où $P(A \cup B) = p_1 + \cdots + p_s + p'_1 + \cdots + p'_r = P(A) + P(B)$.

Technique

Si l'on connaît $P(A)$, on peut calculer $P(\bar{A})$:

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

4. A et $\bar{A}$ sont incompatibles avec $A \cup \bar{A} = \Omega$.
D'où $P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$.

Définitionde la loi équirépartie

Faire *l'hypothèse d'équiprobabilité*, c'est dire que les n événements élémentaires ont tous la même probabilité : $P(e_1) = P(e_2) = \ldots = P(e_n)$.

Vocabulaire

Une issue qui réalise A est souvent appelée « cas favorable à A »
L'ensemble de toutes les issues est l'ensemble des cas possibles

Propriété

Dans une situation d'équiprobabilité, pour tout i, $P(e_i) = \frac{1}{n}$. Si l'événement A comporte k issues favorables on a : $P(A) = \frac{k}{n}$.

On énonce $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$.

Démonstration

Soit p la probabilité de chacun des événements e_i. $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = np$; d'où $np = 1$ et $p = \frac{1}{n}$. On a $P(A) = kp = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$.

Calculer une probabilité

Énoncé 1

À la suite d'une étude statistique dans un grand magasin, on a noté les résultats suivants concernant la demande quotidienne de téléviseurs :

Demande	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Probabilité	0,05	0,10	0,20	0,25	0,20	0,15	0,05

1. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « un jour donné, la demande est strictement inférieure à 4 » ;
B : « un jour donné la demande est au moins égale à 2 ».
2. Quelle est la probabilité de l'événement $A \cap B$?

Méthode

La probabilité de *A* est obtenue en ajoutant les probabilités des événements élémentaires qui réalisent *A*.

Solution

1. $A = \{0, 1, 2, 3\}$.
Donc $P(A) = 0{,}05 + 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}25$, soit $P(A) = 0{,}60$.
L'événement $\overline{B}$ est réalisé si la demande est strictement inférieure à 2.
D'où $P(\overline{B}) = 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}15$.
Par suite $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
2. $A \cap B$ est réalisé si la demande est 2 ou 3 : $P(A \cap B) = 0{,}45$.

Utiliser la loi équirépartie

Énoncé 2

Dans un lot de 5 000 vis, on a constaté que 500 présentent le défaut (a), 400 le défaut (b) et 200 les deux défauts. On choisit au hasard une vis dans ce lot.
Soit *A* l'événement « la vis présente le défaut (a) » et *B* l'événement « la vis présente le défaut (b) ».
1. Quelle est la probabilité que la vis présente au moins l'un des deux défauts ?
2. Quelle est la probabilité que la vis ne présente aucun des deux défauts ?

Méthode

L'expression « choisir au hasard » conduit à utiliser la loi équirépartie.

Solution

1. Le tableau ci-contre fournit la répartition des vis suivant qu'elles présentent ou non les défauts (a) et (b).
Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{500}{5\,000} + \frac{400}{5\,000} - \frac{200}{5\,000} = \frac{7}{50} = 0{,}14.$$

	A	$\overline{A}$	
B	200	200	400
$\overline{B}$	300	4 300	4 600
	500	4 500	5 000

2. L'événement « la vis ne présente aucun des deux défauts » est l'événement contraire de l'événement « la vis présente au moins l'un des deux défauts ».
Sa probabilité est donc égale à $1 - 0{,}14 = 0{,}86$.

4. Espérance, variance et écart type

Technique

Ces formules sont semblables à celles de la moyenne, de la variance et de l'écart type d'une série statistique obtenues à partir des fréquences.

Définition

Lorsqu'une loi de probabilité P est définie sur un ensemble Ω d'issues constituées de nombres réels e_i, on définit l'espérance μ, la variance V et l'écart type σ de la loi de probabilité par :

$$\mu = e_1p_1 + e_2p_2 + \cdots + e_np_n = \sum_{i=1}^{i=n} e_ip_i,$$

$$V = (e_1 - \mu)^2p_1 + (e_2 - \mu)^2 + \cdots + (e_n - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (e_i - \mu)^2p_i \text{ et } \sigma = \sqrt{V}.$$

5. Variable aléatoire

Ω est un ensemble sur lequel on a défini une loi de probabilité P.

Définition

Lorsqu'à chaque événement élémentaire de Ω on associe un nombre réel on dit que l'on définit une **variable aléatoire** sur Ω.

Notation

Une variable aléatoire se note en général X, Y ou Z.

La variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs x_1, $x_2, \ldots, x_n$, l'événement « X prend la valeur x_i » se note $(X = x_i)$.

Si cet événement est réalisé pour les seuls éléments d'une partie A de Ω, la probabilité de l'événement $(X = x_i)$ est la probabilité de A.

On écrit $p(X = x_i) = P(A) = p_i$.

Technique

Dans le tableau, les valeurs de X sont écrites dans l'ordre croissant.

Définition

La loi de probabilité de la variable X est la fonction qui à toute valeur x_i de X associe $P(X = x_i)$ ou p_i.

Cette loi est en général donnée dans un tableau.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

La somme des probabilités p_i est égale à 1 : $\sum_{i=1}^{i=n} p_i = 1$.

À partir d'une même expérience, on peut définir plusieurs variables aléatoires.

Vocabulaire

Dans un jeu de hasard, le mot « espérance » fait penser à « espoir de gain ». Un jeu est équitable si l'éspérance est nulle.

Définition

L'espérance mathématique, notée $\boldsymbol{E(X)}$, **la variance**, notée $\boldsymbol{V(X)}$, et **l'écart type** noté $\boldsymbol{\sigma(X)}$ de X sont respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de X, c'est-à-dire :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_ip_i; \quad V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2p_i - (E(X))^2$$

et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On remarque que la variance et l'écart-type sont toujours positifs.

des Méthodes

Définir et étudier une variable aléatoire

Énoncé 1

L'expérience aléatoire consiste à lancer une pièce de monnaie trois fois de suite : on note P ou F selon qu'apparaît pile ou face.

a. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de fois où « pile » apparaît : déterminer les valeurs possibles pour X.

b. Au cours du jeu, le joueur gagne 4 euros s'il obtient deux fois « pile » et perd 2 euros dans les autres cas : définir une nouvelle variable aléatoire Y.

Méthode

Bien comprendre quelles sont toutes les issues possibles de l'expérience et les valeurs de la variable aléatoire.

Pour chaque événement $(X = x_i)$, déterminer les issues qui lui sont « favorables ».

Solution

a. L'événement $(X = 0)$ est réalisé si l'on obtient FFF.

L'événement $(X = 1)$ est réalisé pour PFF ou FPF ou FFP.

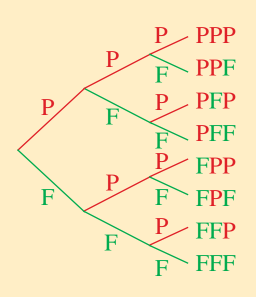
L'événement $(X = 2)$ l'est pour PPF ou PFP ou FPP.

Et l'événement $(X = 3)$ est réalisé pour PPP.

b. Pour cette variable Y, les seules valeurs possibles sont -2 et 4.

L'événement $(Y = 4)$ est réalisé pour PPF ou PFP ou FPP.

L'événement $(Y = -2)$ est réalisé pour les cinq autres éventualités.



Énoncé 2

Dans les lancers de pièces trois fois de suite de l'exercice précédent, on suppose que les huit événements élémentaires sont équiprobables.

a. Trouver la loi de probabilité des deux variables aléatoires X et Y.

b. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable Y.

Méthode

Pour vérifier la loi de probabilité on peut contrôler que la somme des probabilités fait 1.

Solution

a. Pour la variable X

La probabilité de chacun des huit événements élémentaires est $\frac{1}{8}$.

L'événement $(X = 0)$ est l'événement {FFF} donc $p_0 = p(X = 0) = \frac{1}{8}$.

L'événement $(X = 1)$ est l'événement {PFF ; FPF ; FFP} : $p_1 = \frac{3}{8}$. De même :

$p_2 = p(X = 2) = \frac{3}{8}$ et $p_3 = p(X = 3) = \frac{1}{8}$.

X	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Pour la variable Y : L'événement $(Y = 4)$ est l'événement {PPF ; PFP ; FPP} donc $p(Y = 4) = p'_1 = \frac{3}{8}$.

L'événement $(Y = -2)$, qui est l'événement contraire, a pour probabilité $p'_2 = \frac{5}{8}$.

Y	-2	4
p'_i	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

b. $E(Y) = (-2)\times\frac{5}{8} + 4\times\frac{3}{8} = \frac{1}{4}$;

$V(Y) = \frac{5}{8}\left(-2-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(4-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1\,080}{128} = 8{,}4375$; $\sigma(Y) = \sqrt{8{,}4375} \approx 2{,}905$.

Exercices et Problèmes

Pour s'entraîner

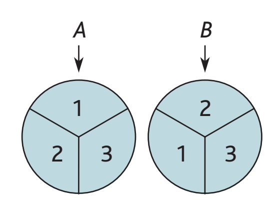
Distributions de fréquences

1 On rencontre quatre groupes sanguins : O ; A ; B et AB. Pour chacun de ces groupes, on trouve soit un rhésus positif (+) soit un rhésus négatif (–).

1. Dresser l'inventaire de tous les cas possibles.

2. En Europe, 45 % des individus sont du groupe O et 85 % de ces derniers sont de rhésus (+). Dans une population de 3 000 personnes, combien rencontre-t-on de personnes du groupe O+ ? Quel est le pourcentage de ces personnes par rapport à l'effectif total ?

2 On considère deux roulettes *A* et *B* ; chacune d'elles est partagée en 3 secteurs égaux marqués 1, 2, 3. On fait tourner les deux roulettes l'une après l'autre et on note les deux numéros obtenus $(a\ ;b)$: le joueur note alors X le *plus grand* des deux nombres a ou b ; s'il obtient $(a\ ;a)$, il note $X = a$.



1. Voici les résultats pour 10 jeux successifs :
(1 ; 2) (3 ; 1) (3 ; 3) (1 ; 3) (2 ; 1) (3 ; 2) (2 ; 3) (2 ; 2) (1 ; 1) (1 ; 3).
Trouver la fréquence des différentes valeurs prises par *X*. Calculer la moyenne.

2. Par simulation, on a obtenu les résultats suivants pour des échantillons E_1 (100 jeux), E_2 (100 jeux), E_3 (500 jeux) et E_4 (1 000 jeux).

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
E_1	12	34	54
E_2	10	27	63
E_3	51	144	305
E_4	101	313	586

Pour chacun de ces échantillons, calculer la fréquence de chacune des trois valeurs de *X*, puis la moyenne, et enfin pour les 1700 jeux.

3 On dispose de deux jetons dont chacun a une face peinte en rouge et une face peinte en bleu. On jette les jetons et on note les couleurs obtenues : RR ; RB ou BB. On répète 20 fois ce lancer de deux jetons. Voici les résultats pour 5 échantillons de 20 lancers :

	RR	RB	BB
E_1	4	13	3
E_2	5	10	5
E_3	4	8	8
E_4	6	10	4
E_5	3	12	5

1. Pour chacun de ces 5 échantillons, calculer la fréquence de chacun des trois événements RR, RB, BB puis la fréquence pour les 100 lancers.

2. Le joueur gagne 5 euros si les deux couleurs sont identiques et il en perd 4 si elles sont différentes. Pour le premier échantillon de 20 lancers, calculer la fréquence de l'événement « le joueur gagne 5 » et celle de l'événement « le joueur perd 4 ».

3. Calculer la moyenne des gains : une perte de 4 est un « gain négatif –4 ».

4. Répondre aux mêmes questions pour les autres échantillons.

Événements

4 On considère 15 jetons numérotés de 1 à 15. Les jetons portant un numéro pair sont rouges, les autres sont bleus.

1. Combien y a-t-il de jetons de chaque couleur ?

2. Combien y a-t-il de jetons dont le numéro est multiple de 3 ? Combien de rouges ? Combien de bleus ?

5 **1.** Combien peut-on écrire de nombres de trois chiffres différents au moyen des seuls chiffres 1 ; 2 et 3 ?

2. Combien peut-on écrire de nombres de quatre chiffres au moyen de deux chiffres 1, un chiffre 2 et un chiffre 3 ?

6 On jette un dé rouge et un dé bleu. On écrit dans le tableau ci-dessous la différence entre le nombre écrit sur le dé rouge et celui sur le dé bleu.

R \ B	1	2	3	4	5	6
1	0	–1				
2	1					
3						
4						
5						
6						

1. Recopier et compléter ce tableau.
2. Dresser la liste de toutes les éventualités possibles.

7 Un jeu de 32 cartes comporte quatre « couleurs » : cœur, carreau, pique et trèfle. Les cœurs et les carreaux sont rouges et les autres sont noirs.
Pour chaque « couleur » il y a 8 cartes : 7-8-9-10-valet (V)-dame (D)-roi (R) et as (A).
1. Combien y a-t-il de cartes rouges ?
Combien d'as rouges ? Combien de rois ? De rois noirs ?
2. A est l'ensemble des rouges, B l'ensemble des rois. On désigne par $A \cap B$ l'ensemble des cartes *communes* à A et B : combien y a-t-il de cartes dans $A \cap B$?
On désigne par $A \cup B$ l'ensemble des cartes qui appartiennent au moins à l'un des deux, c'est-à-dire soit à A, soit à B soit aux deux ensembles.
Combien y a-t-il d'éléments dans $A \cup B$?

8 Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'espagnol, 8 élèves étudient les deux langues. Pour un élève donné, on note A l'événement « l'élève étudie l'anglais » et E l'événement « l'élève étudie l'espagnol ».
1. Que représente l'événement $A \cap E$?
2. Que représente l'événement $A \cup E$?
3. Combien d'élèves n'apprennent ni l'anglais, ni l'espagnol ?
4. Quel est l'événement contraire de A ?

9 On écrit chacune des lettres du mot TAUX sur un carton et on place ces quatre cartons dans un sac. On tire un carton au hasard, puis un second sans remettre le premier dans le sac. On forme ainsi un assemblage de deux lettres sans répétition de lettre, appelé encore « mot » : par exemple TA ; AT ; XT.
1. Utiliser un arbre, pour déterminer combien de tels assemblages peuvent ainsi être formés.
2. Soit E l'événement : « *le mot obtenu commence par la lettre T* » et F l'événement « *le mot contient deux voyelles* ».
Écrire les issues qui réalisent E, puis celles qui réalisent $\overline{E}$; même question pour F et $\overline{F}$.
3. Y a-t-il des issues qui réalisent $E \cup F$?
Y a-t-il des issues qui réalisent $E \cap F$?

10 D'un jeu de cartes, on extrait 12 cartes : le Roi, la Dame et le Valet de cœur, de même pour les carreaux, les piques et les trèfles. On choisit au hasard une carte dans ce paquet.
1. Combien d'issues sont favorables à chacun des événements suivants :
A : la carte est une Dame ;
B : la carte est un Valet ;
C : la carte est un Valet noir ;
D : la carte est une Dame ou un Roi ?
2. Préciser l'événement contraire de chacun de ces événements.

Simulation

11 On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie bien équilibrée.
1. Comment utiliser une calculatrice pour simuler cette expérience ?
2. Simuler 50 lancers de la pièce. Noter le nombre de « Pile » obtenu.
3. Quelle est la fréquence des « Pile » ? quelle est la fréquence des « Face » ?

12 On lance deux pièces de monnaie simultanément et on s'intéresse au résultat obtenu : Pile-Pile (PP) Pile et Face (PF), Face-Face (FF).
1. En utilisant une calculatrice, fournir un échantillon de taille 100 de cette expérience.
2. Donner la distribution des fréquences associées à cet échantillon.
3. Si les pièces sont bien équilibrées, autour de quelles valeurs vont se stabiliser ces fréquences si l'on simule un grand nombre de lancers ?

Probabilités

13 Reprendre la situation de l'exercice 2.
1. Montrer qu'il y a 9 couples $(a\,;b)$ possibles et compléter le tableau suivant en marquant dans chaque case la valeur de X.
Ex. : dans la case (1 ; 2) on marque la valeur 2 pour X.

a \ b	1	2	3
1		2	
2			
3			

2. En supposant que les 9 événements ont la même probabilité de se produire, calculer la probabilité d'obtenir $X = 1$; puis $X = 2$ et $X = 3$.
Comparer aux fréquences du n° 2.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins 2 pour X ; celle d'avoir au plus 2.

14 On lance une pièce bien équilibrée deux fois de suite et on note P pour pile et F pour face.
1. En complétant l'arbre ci-contre, montrer qu'il y a quatre issues possibles
2. Quelle est la probabilité d'avoir P en premier ? Celle d'avoir F en dernier ? Celle d'avoir deux figures différentes ?

Exercices et Problèmes

15 E est l'ensemble des nombres entiers de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard un de ces nombres. Quelle est la probabilité de chacun des événements :
A : le nombre est multiple de 2 ;
B : il est multiple de 4 ;
C : il est multiple de 5 ;
D : il est multiple de 2 mais pas de 4 ;
E : il est multiple de 4 mais pas de 2.
Quelle est la probabilité de chacun des événements $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$ et $A \cup C$?

16 Une urne contient 3 boules bleues, 5 boules rouges et 2 boules vertes. On tire une boule au hasard dans cette urne.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : la boule est rouge ou bleue ;
B : la boule n'est pas verte ;
C : la boule n'est pas bleue.

17 Soit $E = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_6 ; e_7\}$.
On considère les événements $A = \{e_2 ; e_3 ; e_4\}$, $B = \{e_3 ; e_4 ; e_5 ; e_7\}$ et $C = \{e_1 ; e_5\}$.
Les sept événements élémentaires sont équiprobables.
Calculer $P(A)$; $P(B)$; $P(C)$; $P(A \cap B)$; $P(B \cup C)$; $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$.

18 **1.** On donne $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$.
Calculer $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$, $P(A \cup B)$.
2. Peut-on avoir une probabilité P telle que $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$?

19 D'un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : la carte est un cœur ;
B : la carte est un roi ;
C : la carte est un roi rouge ;
D : la carte n'est ni un roi ni un cœur ?

20 Une enquête nous apprend que, sur cent ménages, 20 ont un chien, 25 ont un chat et 8 ont à la fois un chien et un chat.
On choisit un ménage au hasard.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E : le ménage possède un chien et pas de chat ;
F : le ménage a un chat et pas de chien ;
G : le ménage ne possède ni chien ni chat ;
H : le ménage n'a qu'un seul de ces deux animaux ;
I : il possède au moins un de ces animaux.

21 Un dé à six faces parfaitement équilibré comporte trois faces marquées 6, une face marquée 5 et deux faces marquées 4. Quelle est la probabilité de chacun des événements :
A : le nombre apparu est 6 ;
B : le nombre apparu est pair ;
C : le nombre apparu est supérieur ou égal à 5 ?

22 Sachant que pour les événements A et B on a $P(A) = 0{,}30$; $P(A \cup B) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$, calculer $P(B)$ et $P(\bar{B})$.

23 On jette un dé deux fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir un double puis la probabilité d'obtenir deux numéros différents.

24 On jette un dé deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir un total de 4 ; celle d'obtenir un total supérieur ou égal à 11 ?

25 Un sac contient deux jetons rouges, trois jaunes et cinq bleus. On tire un premier jeton puis un second sans remettre le premier dans le sac.
Démontrer que la probabilité de tirer dans l'ordre un jeton rouge puis un jaune est $\frac{1}{15}$.

26 On reprend le sac de l'exercice 25 : on tire cette fois un premier jeton que l'on remet dans le sac, puis un second jeton. Quelle est la probabilité de tirer dans l'ordre un rouge puis un jaune ?

27 Un sac contient cinq jetons marqués avec les lettres P, A, R, I, S. On tire un jeton, puis un second jeton, sans remise. Quelle est la probabilité de tirer deux voyelles ? Deux consonnes ? Une voyelle et une consonne dans un ordre indifférent ?

28 Un lycée compte 240 élèves en 1re S parmi lesquels 130 demi-pensionnaires. Ces élèves étudient trois langues : 66 élèves étudient l'anglais. 30 % des élèves l'allemand, dont 40 demi-pensionnaires. 25 % des élèves sont des demi-pensionnaires qui étudient l'espagnol.
1. Reproduire et compléter le tableau suivant.

	anglais	allemand	espagnol	Total
Demi-pensionnaires				130
Externes				
Total	66			240

2. Un élève est choisi au hasard parmi les 240 élèves de 1re S. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « l'élève étudie l'anglais » ;

B : « l'élève est externe » ;
C : « l'élève est externe et étudie l'anglais » ;
D : « l'élève n'étudie pas l'espagnol » ;
E : « l'élève est demi-pensionnaire et n'étudie pas l'espagnol. ».

29 Un sac contient six jetons numérotés de 1 à 6. On tire au hasard deux jetons simultanément.

1. Décrire l'ensemble Ω des issues possibles.

2. Calculer la probabilité des événement A et B définis par :
A : « obtenir deux numéros consécutifs » ;
B : « obtenir deux numéros dont la somme est 6 ».

Espérance – Variance – Écart-type

30 Les observations faites à propos du nombre de clients se présentent à la caisse d'un supermarché pendant cinq minutes mènent à la loi de probabilité donnée par le tableau ci-dessous.

Nombre de clients	0	1	2	3	4
Probabilité	0,1	0,25	0,3	0,15	0,2

Calculer l'espérance de cette loi de probabilité.

31 Un dé cubique bien équilibré a 2 faces marquées 1, 3 faces marquées 2 et une face marquée 6. On lance le dé une fois.

1. Donner la loi de probabilité associée à cette expérience.

2. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

32 Lors d'une tombola les gains possibles sont 0 €, 10 €, 20 € et 100 € avec les probabilités respectives 0,4 ; 0,3 ; 0,25 et 0,05.
Calculer l'espérance mathématique du gain.

Variable aléatoire

33 Une variable aléatoire X prend les valeurs 4 ; 5 ; et 6 avec des probabilités égales.
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

34 Voici la loi de X : la valeur a est inconnue. Trouver a sachant que $E(X) = 4{,}7$.

X	-4	5	a
p_i	0,2	0,5	0,3

35 Voici un tableau donnant la loi de probabilité d'une variable aléatoire Y.

Y	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,25	0,25	0,05	0,15

1. La somme de ces probabilités est-elle bien égale à 1 ?

2. Calculer la probabilité de chacun des événements : $A = \{Y \geqslant 0\}$; $B = \{Y < 2\}$.

3. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

36 Un sac contient 26 jetons marqués avec les 26 lettres A, B, ..., Z. On tire un premier jeton puis un second sans remise du premier. On gagne 5 euros par voyelle et on perd 1 euro par consonne.

1. Quelles sont les valeurs possibles du gain ?

2. Trouver la loi de probabilité du gain.

3. Calculer l'espérance du gain.

37 Un jeu comporte 8 cartes marquées :
7- 8 - 9 -10 - V - D - R et As.
On tire une carte au hasard : la variable X prend la valeur 10 si on tire 7, 8, 9 ou 10, la valeur 15 pour V-D-R et la valeur 20 pour l'As.
Donner par un tableau la loi de probabilité de cette variable. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette variable.

38 Un sac contient un jeton marqué 1 et deux jetons marqués 2. On tire un jeton, on note son numéro, on le remet dans le sac, on effectue de même un second tirage et on fait la somme des deux nombres obtenus.

1. Montrer qu'il y a 9 issues possibles en complétant le tableau ci-dessous.

	1	2	2
1	2		
2			
2			

2. S est la variable aléatoire prenant les valeurs de cette somme. Donner la loi de probabilité de S, calculer $E(S)$ et $\sigma(S)$.

39 **VRAI ou FAUX ?**

A. Si l'on jette deux pièces, la probabilité d'obtenir (FF) est la même que celle d'obtenir (FP ou PF).

B. La probabilité d'un événement A est supérieure à celle de son événement complémentaire.

C. La probabilité de $A \cup B$ est égale à $P(A) + P(B)$

D. Si $P(A) = 0{,}5$ et $P(B) = 0{,}3$, on peut avoir :
$$P(A \cap B) = 0{,}2.$$

E. La variable aléatoire X prend les valeurs -2 ; 3 et 4 avec les probabilités 0,5 ; 0,3 et 0,2 : $E(X) = 0{,}7$.

F. La variable Y prend les valeurs 5 et b avec la même probabilité.
Si on a $E(Y) = 3$, alors $b = 5$.

Exercices et Problèmes

Pour approfondir

Simulations et distribution de fréquences

40 On lance 50 fois une pièce de monnaie bien équilibrée et on s'intéresse au nombre d'apparitions de Face (F) ou Pile (P).
1. Indiquer des procédés de simulation de cette expérience aléatoire.
2. Donner des fréquences de F et de P pour des échantillons de 50 lancers.
3. Donner ces fréquences pour un échantillon de 200 lancers.

41 **1.** Comment simuler quatre lancers successifs d'une pièce et compter les « face » (F) ?
2. Montrer que cette simulation donne aussi le nombre de filles dans des familles de quatre enfants, si l'on admet que les fréquences de naissance d'une fille et d'un garçon sont égales.
3. À notre époque, en réalité, il naît environ 105 garçons pour 100 filles : calculer dans ces conditions, la fréquence de naissance d'un garçon et celle de la naissance d'une fille.

42 Dans une lettre de Nicolas Bernoulli, du 23 janvier 1713, on trouve le « Catalogue des enfants de chaque sexe » nés à Londres de 1629 à 1710.
En voici un extrait.

Année	Garçons	Filles
1659	3 209	2 781
1660	3 724	3 247
1661	4 748	4 107
1662	5 213	4 803
1663	5 411	4 881
1664	6 041	5 681
1665	5 114	4 858
1666	4 678	4 312
1667	5 616	5 322
1668	6 073	5 560

Pour chaque année :
1. Trouver l'écart entre le nombre de garçons et le nombre de filles.
2. Calculer la fréquence du nombre de naissances de filles et du nombre de naissance de garçons.
3. Calculer le rapport entre le nombre de garçons et le nombre de filles.

43 Un dé comporte une face marquée 1 ; trois faces marquées 2 et deux faces marquées 3.
On jette ce dé deux fois de suite et on fait la somme des deux numéros obtenus.
1. Montrer que les valeurs de cette somme sont : 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6
2. Voici les résultats obtenus pour trois séries de 300 lancers :

Somme	2	3	4	5	6
1re série	9	45	120	96	30
2e série	6	54	114	102	24
3e série	8	49	128	84	31

Pour chaque série de lancers, calculer la fréquence pour chaque valeur de cette somme puis la moyenne correspondante.
3. Mêmes questions pour l'échantillon obtenu en regroupant ces trois séries.
4. Imaginer un mode de simulation de cette expérience aléatoire.

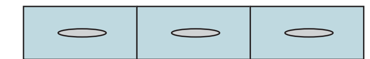
Probabilité d'un événement

44 On forme un nombre de deux chiffres en lançant un dé bien équilibré deux fois de suite : le nombre obtenu au premier lancer fournit le chiffre des dizaines et le second le chiffre des unités. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
– le nombre formé est pair ;
– le nombre contient deux chiffres pairs ;
– le chiffre des dizaines est le double du chiffre des unités ;
– le nombre est strictement supérieur à 44.
Piste : pour visualiser tous les cas, on peut dresser un tableau sur lequel apparaissent les 36 cas et colorier les cases qui correspondent aux issues favorables à un événement.

45 Un nombre de cinq chiffres est composé uniquement des chiffres 1 et 2. Il peut ne contenir que des 1 ou que des 2.
1. Combien y a-t-il de tels nombres ?
2. On choisit un de ces nombres au hasard **A.**
a) Quelle est la probabilité qu'il commence par 1 ?
b) Qu'il se termine par 2 ? qu'il commence par 2 et se termine par 2 ?

46 On jette trois fois de suite un dé. On note les trois nombres obtenus.
A est l'événement : « un des trois nombres au moins est multiple de 3 ».
1. Définir l'événement A.
2. Calculer $P(\bar{A})$ et en déduire $P(A)$.

47 On dispose d'un tiroir à trois cases comme indiqué sur le dessin.



1. Montrer qu'il y a six manières de placer les trois nombres 1-2-3 dans ce tiroir, un par case.
2. On place au hasard ces trois nombres, et on lit le nombre ainsi formé.
a) Quelle est la probabilité d'avoir formé 231 ?
b) Quelle est la probabilité d'avoir un nombre pair ?
c) Quelle est celle d'avoir un nombre impair ?
d) Quelle est la probabilité d'avoir un nombre ayant 2 comme chiffre des dizaines ?
e) Celle d'avoir 1 comme chiffre des unités ?

48 Dans un groupe de 120 personnes, il y a 60 % d'hommes. On sait que 15 % des hommes et 20 % des femmes parlent l'espagnol. On choisit une personne au hasard dans ce groupe. Quelles sont les probabilités des événements suivants :
K : c'est un homme qui parle l'espagnol ?
L : c'est une femme qui ne parle pas l'espagnol ?
M : c'est une personne parlant l'espagnol ?

PISTE On peut utiliser un arbre.

49 D'un jeu de 32 cartes, on tire une première carte, puis une seconde sans remettre l'autre dans le jeu.
1. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
A : les deux cartes sont des cœurs ;
B : les deux cartes sont des rois ;
C : seule la première carte est un cœur.
2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

50 On tire une carte dans un jeu de 32 cartes : on note cette carte et on la remet dans le jeu, puis on tire une seconde carte.
Quelle est la probabilité de chacun des événements définis à l'exercice 49 ?

51 Une urne contient 7 boules rouges et 6 boules bleues indiscernables entre elles au toucher.
1. On tire deux boules l'une après l'autre et sans remise.
Quelle est la probabilité de chacun des événements :
A : On tire une rouge puis une bleue ;
B : On tire une bleue puis une rouge ;
C : On tire deux boules de couleurs distinctes ;
D : On tire deux boules de même couleur ?
2. On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On tire une seconde boule. Quelle est la probabilité de chacun des événements précédents ?

52 Un sac contient 2 boules rouges, 2 noires et 10 vertes. On choisit une boule dans le sac, on note sa couleur et on la replace dans le sac et on recommence une seconde fois ce tirage.
Calculer les probabilités des événements suivants :
– on a tiré deux rouges ;
– on a tiré deux vertes ;
– on a tiré deux boules de même couleur ;
– on a tiré deux boules de couleurs différentes.

PISTE Calculer le nombre d'issues possibles.

53 On dispose au hasard trois drapeaux : français, italien et espagnol, l'un à côté de l'autre en ligne.
1. Quelle est la probabilité que le drapeau français soit entre les deux autres ?
2. Quelle est la probabilité que le drapeau italien soit à une extrémité ?

54 On lance un dé équilibré deux fois de suite Quelle est la probabilité de chacun des événements :
A : la somme des résultats est supérieure ou égale à 5 ;
B : le nombre obtenu au second lancer est strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ;
C : la valeur absolue de la différence des deux nombres est inférieure ou égale à 2 ?

55 On jette une pièce 10 fois de suite.
On s'intéresse à l'événement B :
« obtenir au moins une fois PILE »
Calculer $P(\bar{B})$ et en déduire $P(B)$.

56 Cinq élèves A-B-C-D-E prennent le départ d'une course. On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo à l'arrivée.
1. Combien y a-t-il d'arrivées possibles ?
2. On s'intéresse aux trois premiers : quelle est la probabilité pour que les trois premiers soient A-B-C dans cet ordre ? Et pour C-E-D ?
3. Quelle est la probabilité pour que B soit en tête ?
4. Quelle est la probabilité pour que B figure dans les trois premiers ?

57 Un sac contient 5 jetons marqués :
(-5) ; (-3) ; (1) ; (2) et (6).
1. On tire un premier jeton sans remise, on note sa valeur a, on en tire un second, on note sa valeur b.
L'événement E est réalisé si $a+b$ est positif. L'événement F est réalisé si ab est positif.
Calculer $P(E)$; $P(F)$; $P(E \cup F)$; $P(E \cap F)$.

2. Reprendre ces questions en supposant que, après le premier tirage, on remet le jeton tiré dans le sac.

58 On forme un numéro de téléphone à dix chiffres, les deux premiers étant [0 1], les huit autres choisis parmi les dix chiffres possibles, dans un ordre quelconque.
1. Combien peut-on former de numéros ?
2. Combien de temps faut-il pour les former tous, si l'on estime qu'il faut 15 secondes pour en former un ?
3. Si Karim forme un tel numéro au hasard, quelle est la probabilité qu'il forme 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ?

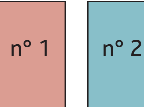
59 Un immeuble comporte quatre étages. Deux personnes A et B prennent l'ascenseur au rez-de-chaussée marqué en gris. Chacune peut choisir l'un des quatre étages.
1. Combien y a-t-il de choix possibles ?
2. Quelle est la probabilité que les deux personnes descendent au même étage ?
3. Reprendre les questions **a)** et **b)** si cinq personnes prennent l'ascenseur.

PISTE Utiliser un arbre en précisant les choix pour A puis pour B.

60 Soit A et B deux événements quelconques d'un univers Ω.
On appelle B_1, l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas éléments de A.
1. Montrer que $A \cup B = A \cup B_1$ et que A et B_1 sont disjoints. En déduire $P(A \cup B_1)$.
2. Exprimer $P(B)$ à l'aide de $P(B_1)$.
En déduire que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Variable aléatoire – Espérance et variance

61 Dans le sac n° 1 on place les trois jetons marqués (2) (3) (4). Dans le sac n° 2 on place les jetons marqués (3) (4) et (5).



L'expérience consiste à tirer au hasard un jeton dans chaque sac. On désigne par X la variable aléatoire qui prend les valeurs de la somme des deux nombres obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de cette variable.
2. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

PISTE Utiliser un tableau pour trouver les valeurs possibles pour X.

62 Reprendre l'expérience aléatoire du 61.
Le joueur gagne 3 euros si la somme S obtenue est paire et il perd 3 euros dans le cas contraire.
1. Déterminer la loi de probabilité de cette nouvelle variable aléatoire Y : une perte est une valeur négative.
2. Calculer $E(Y)$ et l'écart type de Y.

63 Un jeu consiste à lancer deux dés parfaits. Un joueur mise 1 euro sur le numéro 5.
Si ce numéro est obtenu sur chacun des deux dés, le joueur reçoit 4 euros. S'il apparaît sur un seul des deux dés, il reçoit 3 euros. Dans tous les autres cas, il perd sa mise. Le gain du joueur est la somme reçue diminuée de la mise : c'est une variable aléatoire X.
1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

64 Un dé comporte une face marquée 1 ; trois faces marquées 2 et deux faces marquées 3.
On jette ce dé deux fois de suite et on fait la somme S des deux numéros obtenus.
1. Quelles sont les valeurs prises par S ?
2. Quelles sont les six issues favorables à l'événement $(S = 3)$?
Calculer la probabilité de $(S = 3)$.
3. Pour trouver la loi de probabilité de S, dresser un tableau carré : sur la première ligne marquer les six nombres 1-2-2-2-3-3, de même pour la première colonne. Donner la loi de S sous forme de tableau.
4. Calculer $E(S)$ et $\sigma(S)$.

65 Dix chevaux participent à une course. On s'intéresse aux trois premiers.
1. Pour le cheval qui arrive premier, il y a 10 possibilités. Combien y en a-t-il pour le cheval qui est second ? Combien y a-t-il d'arrivées possibles pour les trois premiers ?
2. Le joueur paie 5 euros pour jouer : il propose trois chevaux dans l'ordre.
Si son « tiercé » est le bon, il gagne 2 000 euros si non il perd sa mise.
Quelle est l'espérance de son gain ?

66 Reprendre l'exercice précédent avec 20 chevaux et un gain possible de 20 000 euros.

67 **1.** Un sac E contient trois jetons marqués 1, 2, 3 et un sac F contient les jetons marqués 2, 3, 4.
On tire un jetons dans E et un jeton dans F.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres marqués sur ces jetons.
Déterminer la loi de cette variable, son espérance, sa variance et son écart-type.
2. Les nombres écrits sur les jetons sont multipliés par 10 et on opère de la même façon. Y est la somme des nombres marqués sur les deux jetons. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.
3. Montrer que $E(Y) = 10E(X)$ et $\sigma(Y) = 10\sigma(X)$.

Pour aller plus loin

68 **Les anniversaires**

Un sac contient 365 jetons, numérotés de 1 à 365, autant que de jours de l'année.
Pierre tire un jeton, note le numéro et le replace dans le sac, puis Jean tire à son tour un jeton.

1. Quelle est la probabilité qu'ils tirent deux numéros pairs ? Deux numéros impairs ?

2. Quelle est la probabilité que les deux amis soient nés tous les deux le premier mai ?

3. Quelle est la probabilité qu'ils aient le même jour anniversaire (on ne tient pas compte de l'année de naissance) ?

69 **Un système joué aux dés**

On considère le système d'équations d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ mx - ny = q \end{cases}$$

Les coefficients m, n et q sont choisis au hasard dans l'ensemble $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ de la façon suivante : On lance un dé : le numéro sorti donne m. On le lance une seconde fois : le numéro obtenu donne n. Et une troisième fois : le numéro donne q.

1. Quelle est la probabilité que le système admette pour solution le couple $(3\,;0)$?

2. Quelle est la probabilité que le système admette une solution unique ?

3. Celle que le système n'ait pas de solution ?

4. Celle qu'il ait une infinité de solutions ?

70 On considère l'équation $x^2 + px + q = 0$.

On lance un dé, le numéro sorti donne la valeur du coefficient p.
On lance le dé une seconde fois, le numéro donne alors q.

1. Quelle est la probabilité que l'équation donnée admette deux racines distinctes ?

2. Quelle est la probabilité que l'équation admette une racine double.

3. Quelle est la probabilité que l'équation n'admette pas de racine réelle ?

71 **Les chapeaux**

Trois personnes A, B et C ont posé leurs chapeaux a, b, c au vestiaire. À la sortie du restaurant, A prend un chapeau au hasard, B fait de même et C prend le chapeau qui reste.

1. Dessiner un arbre pour rendre compte de toutes les issues possibles.

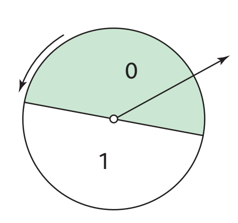
2. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

M : chaque personne retrouve son chapeau ;
N : une seule retrouve son chapeau ;
P : personne ne retrouve son chapeau ?

72 Reprendre le problème de l'exercice précédent avec quatre personnes A, B, C et D et quatre casquettes a, b, c et d.

73 **Jeux de roulettes**

Une roulette comporte deux secteurs égaux, marqués 0 et 1.
Au début du jeu, on dispose de 9 euros.



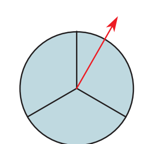
On actionne la roulette : si le 1 sort, on triple son avoir ; si le 0 sort, on le divise par 3.

1. On actionne la roulette une fois. X est la variable aléatoire égale à ce que l'on possède après ce jeu.
Préciser la loi de X et calculer $E(X)$.

2. On actionne la roulette deux fois de suite. Y est la variable aléatoire égal à ce que l'on possède après ces deux actions. Préciser la loi de Y et calculer $E(Y)$.

74 **Jeux de roulettes**

Une roulette est divisée en trois secteurs égaux. Ces secteurs portent les numéros 0 ; 2 ; 4.



1. On fait tourner la roulette : on gagne la somme X marquée sur le secteur.
Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer $E(X)$.

2. On fait tourner la roulette deux fois de suite. Le gain Y est alors égal au produit des nombres marqués. Quelle est la loi de Y ? Calculer $E(Y)$.

3. On fait tourner la roulette trois fois de suite. On désigne par Z le nombre égal au produit des trois nombres obtenus. Pour obtenir la loi de Z, dresser un tableau :
La première ligne comporte les issues possibles pour les deux premiers lancers : 0-0-0-0-0-4-8-8-16 ;
La première colonne comporte les issues possibles pour le troisième lancer : 0-2-4.
Marquer dans les 27 cases du tableau tous les produits possibles après trois lancers.
Calculer $E(Z)$.

75 **Promenade aléatoire**

Un enfant se déplace en ligne droite de manière aléatoire de la façon suivante :
Il effectue quatre déplacements, soit de 1 pas soit de 2 pas, par exemple le trajet 1-1-2-1, ce qui fait un total de 5 pas. Il revient au point de départ et recommence 100 fois !

Exercices et Problèmes

1. S est la variable aléatoire égale au nombre des pas effectués au cours de chaque trajet.
Quelles valeurs peut prendre S ?

2. Simulation

Pour simuler ces trajets, on place 100 jetons marqués 1 et 100 jetons marqués 2 dans un sac : on tire un jeton, on note le numéro, on le remet dans le sac et on effectue quatre tirages identiques et on fait la somme des quatre numéros obtenus. On peut aussi utiliser un *tableur*.

a) Voici les résultats obtenus pour S dans trois échantillons E_1, E_2, E_3 de 100 trajets chacun :

S	4	5	6	7	8
E_1	5	22	41	22	10
E_2	7	25	44	24	0
E_3	4	20	39	28	9

Pour chacun de ces échantillons, calculer la fréquence de chaque événement $(S = 4)$, $(S = 5)$, etc. et calculer la moyenne.

b) Voici les résultats pour un échantillon E_4 de 500 trajets, puis un échantillon E_5 de 1 000 trajets et enfin E_6 de 1 500 trajets :

S	4	5	6	7	8
E_4	35	118	196	118	33
E_5	62	267	364	234	73
E_6	103	392	559	336	110

Pour chacun de ces trois échantillons, calculer la fréquence des valeurs de S puis la valeur moyenne de S.

3. Probabilités

a) À l'aide d'un arbre, montrer qu'il y a 16 possibilités pour un trajet.

b) Dénombrer les trajets pour lesquels on a $S = 4$, ceux pour lesquels on a $S = 5$ et ainsi de suite jusqu'à $S = 8$.

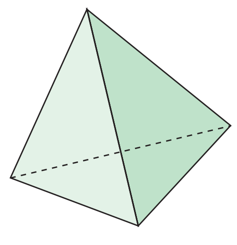
c) Quelle est la probabilité de chacun de ces événements ? Comparer aux fréquences obtenues pour les échantillons E_4, E_5, E_6.

d) Calculer l'espérance puis la variance de cette variable S.

76 Dé tétraédrique

On dispose d'un dé tétraédrique, c'est-à-dire à quatre faces (qui sont des triangles équilatéraux), marquées :


1-2-3-4.



Lorsque l'on lance ce dé, on note le numéro marqué sur la face qui est posée sur la table.

Il y a équiprobabilité d'obtention de chaque face.
L'expérience consiste à jeter ce dé deux fois de suite : on fait la somme S des deux nombres obtenus.

1. Simulation

a) Quelles sont les valeurs possibles pour cette somme S ?

b) Pour un échantillon E_1 de 100 expériences, puis un échantillon E_2 de 500, puis E_3 de 1 000, voici les résultats obtenus pour chaque somme possible :

S	2	3	4	5	6	7	8
E_1	7	8	20	26	24	12	3
E_2	33	59	97	123	90	64	34
E_3	64	111	206	260	182	114	63

Pour chacun de ces trois échantillons, calculer la fréquence de chaque valeur de S.
Cumuler ces trois échantillons et calculer les nouvelle fréquences.

c) Comment faire ces simulations à l'aide d'un tableur ?

2. Probabilités

a) Pour cette expérience, précisez les 16 cas possibles en dressant un tableau à double entrée.
Démontrer les issues favorables à chacun des événements :

$$S = 2\,;\; S = 3\,;\; \ldots\,;\; S = 8.$$

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire S et comparer aux fréquences obtenues.

c) Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

d) Si S est paire, le joueur gagne S jetons ; si S est impaire, il perd S jetons.
Donner la loi de probabilité de cette nouvelle variable G correspondant au gain du joueur.
Calculer $E(G)$.

77 Lancers de trois dés

On lance trois dés : un blanc, un bleu et un noir.
on fait la somme des numéros qui apparaissent.

1. Montrer que cette variable aléatoire S peut prendre toutes les valeurs entières de 3 à 18.

2. Simulation

Par simulation de 1 000 lancers de ces trois dés, on a obtenu :

S	3	4	5	6	7	8	9	10
Ef.	6	10	18	52	79	90	128	129

S	11	12	13	14	15	16	17	18
Ef.	123	110	86	69	53	29	12	6

Calculer les fréquences pour chaque somme de la valeur moyenne.

3. Probabilités

a) Montrer qu'il y a 216 issues possibles pour un lancer de 3 dés.

b) La somme $S = 3$ est obtenues d'une seule façon ; quelle est la probabilité de l'événement $(S = 3)$?
Quelle est celle de l'événement $(S = 18)$?
c) Combien y a-t-il de façon d'obtenir le total $S = 4$?
Quelle est la probabilité de cet événement ?
Même question pour $S = 17$.
d) Dans une réponse au Prince de Toscane, Galilée a montré qu'il y a 25 façons d'obtenir un total 9 et 27 façons d'obtenir un total 10. Retrouver ces résultats. Quelles sont les probabilités des événements $(S = 9)$ et $(S = 10)$?

78 Dès pipés

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé. Quand il s'est immobilisé, on lit le chiffre marqué sur la face supérieure. On a $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.
déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire dans chacun des cas suivants :
1. Le dé n'est pas « pipé » ; les six événements sont équiprobables.
2. Le dé est « pipé » de façon que la probabilité d'apparition de l'événement $\{i\}$ soit proportionnelle à i.
3. Le dé est « pipé » de façon que la probabilité d'obtenir un nombre pair est le quart de celle d'obtenir un nombre impair.
Chaque nombre pair a la même probabilité de sortie. Chaque nombre impair aussi.

79 Une boule blanche

Une urne contient une boule blanche et n boules rouges $(n \geqslant 2)$.
On suppose les tirages équiprobables.
1. Calculer la probabilité $P_1(n)$ de tirer une boule rouge dans un tirage d'une boule au hasard. La suite définie par $P_1(n)$ est-elle monotone ? Quelle est la limite de $P_1(n)$?
2. On admet que la probabilité $P_2(n)$ de tirer deux boules rouges dans un tirage simultané de deux boules au hasard est égale à $\frac{n-1}{n+1}$. Étudier la suite définie par $P_2(n)$ (sens de variation et limite).
3. Comparer $P_1(n)$ et $P_2(n)$, déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles on a $P_1(n) - P_2(n) < \frac{1}{8}$.

80 Tournoi de bridge

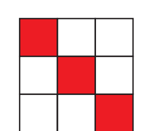
5 personnes A, B, C, D, E participent à un tournoi de bridge. A et B ont des chances égales de gagner, C, D, E ont aussi la même chance, mais A et B ont deux fois plus de chances de gagner que C, D ou E.
1. Calculer la probabilité de gagner pour chacune des 5 personnes.
2. Calculer la probabilité pour que ce soit A ou B qui gagne ? C ou D ou F ? A ou D ?

81 Tirage de jetons

1. Un sac E contient trois jetons marqués 1, 2, 3 et un sac F contient les jetons marqués 2, 3, 4.
On tire un jeton dans E et un jeton dans F.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme des nombres marqués sur ces jetons.
Déterminer la loi de cette variable, son espérance, sa variance et son écart-type.
2. Les nombres écrits sur les jetons son multipliés par 10 et on opère de la même façon. Y est la somme des nombres marqués sur les deux jetons. Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.
3. Montrer que $E(Y) = 10E(X)$ et $\sigma(Y) = 10\sigma(X)$.

82 Des points et des jetons

1. On considère 9 points : $A - B - C - D \ldots I$, tels que trois quelconques ne sont pas alignés. On trace tous les segments joignant les points deux à deux. Montrer que le nombre de ces segments est 36.
2. Sur le carré ci-contre, on place au hasard deux jetons identiques, un jeton par case.



a) combien y a-t-il de façons de les disposer ?
b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cases rouges recouvertes par ces deux jetons.
Calculer $p(X = 2)$ et $p(X = 0)$ et en déduire la loi de probabilité de X. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
c) Reprendre ces mêmes questions pour la variable Y égale au nombre de cases blanches recouvertes par ces 2 jetons.

83 Pour prendre des initiatives

Problème de Galilée
Le prince de Toscane demanda un jour au physicien Galilée : « Pourquoi, lorsque l'on lance 3 dès, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces sommes soient obtenues chacune de 6 façons différentes ».

Exercices et Problèmes

Un peu d'histoire

D'ALEMBERT et les probabilités

À l'époque de d'Alembert et de Pascal lorsqu'on lance une pièce on n'obtient pas PILE ou FACE, mais CROIX ou PILE. L'auteur conteste ici une certaine démarche pour un jeu de hasard.

« … On demande combien il y a à parier qu'on amènera CROIX en jouant deux coups consécutifs. La réponse qu'on trouvera dans tous les auteurs & suivant les principes ordinaires, est celle-ci. Il y a quatre combinaisons :

Premier coup	**Second coup**
Croix	*Croix*
Pile	*Croix*
Croix	*Pile*
Pile	*Pile*

De ces quatre combinaisons, une seule fait perdre & trois font gagner ; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce… Cependant cela est-il bien exact ? Car ne faut-il pas réduire à une les deux combinaisons qui donnent CROIX au premier coup ? Car, dès qu'une fois CROIX est venu, le jeu est fini, & le second coup est compté pour rien. Ainsi il n'y a proprement que trois combinaisons de possibles :

Croix, premier coup
Pile, Croix, premier & second coup
Pile, Pile, premier et second coup

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier…

S'il jouait en trois coups, on trouverait huit combinaisons, dont une seule fait perdre et sept font gagner ; ainsi il y aurait 7 contre 1 à parier…. Mais dans ce cas de trois coups, il n'y a que 4 combinaisons gagnantes :

Croix – Pile Croix – Pile Pile Croix – Pile Pile Pile

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier…

Ceci est digne ce me semble de l'attention des calculateurs ».

Extrait de l'Encyclopédie (1751-1772)
Article CROIX ou PILE (analyse des hasards)
Rédigé par Jean le Rond d'Alembert (1717-1783)

Questions

Ligne 4 : décrire ces quatre combinaisons avec un arbre-Pile.

Ligne 11 : expliquer ce que signifie « 3 contre 1 ». Où retrouve-t-on cette expression à notre époque ?

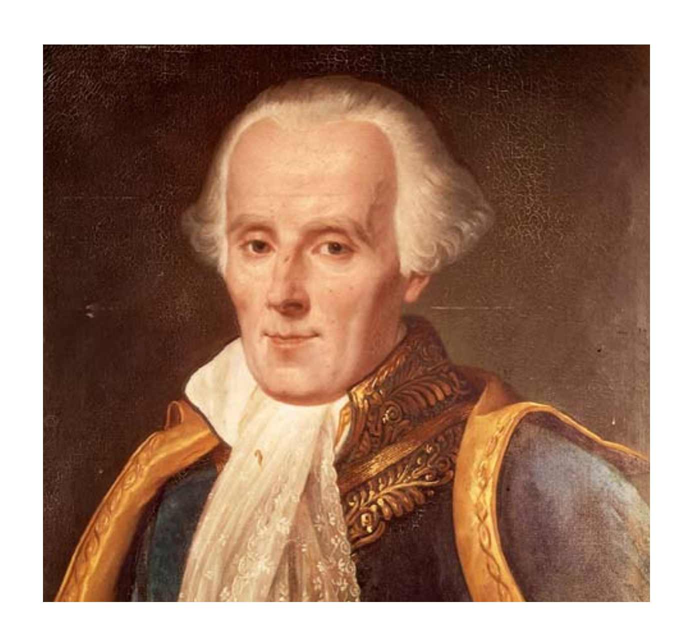
Ligne 21 : représenter par un arbre les cas possibles en jouant en trois coups et trouver la probabilité de gagner.

Une réponse de Laplace

Laplace (1749-1827) commence par démontrer que la probabilité d'amener CROIX au moins une fois en deux coups est de 3/4. Puis il conteste le raisonnement de d'Alembert.

« On peut ne compter à ce jeu que trois cas différents, savoir : croix au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second ; *pile* au premier coup et *croix* au second ; enfin *pile* au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à 2/3 si l'on considérait avec d'Alembert ces trois cas comme également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener *croix* au premier coup est 1/2, tandis que celle des deux autres cas est 1/4 …. Maintenant, si on ajoute la possibilité 1/2 d'amener croix au premier coup à la possibilité 1/4 de *pile* arrivant au premier coup et *croix* au second, on aura 3/4 pour la probabilité cherchée. »

Leçon donnée à l'École Normale en 1795



Questions

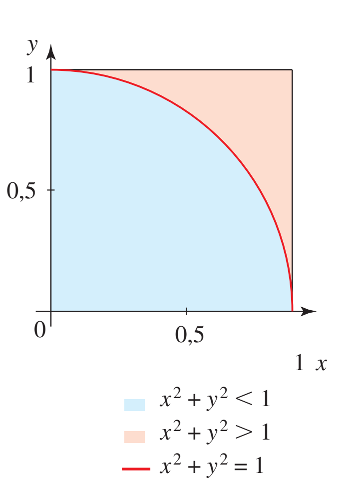
Plusieurs auteurs, dont Diderot et Laplace, contestent la démarche erronée de d'Alembert.

Aux **lignes 10 et 11** de son texte, il considère l'événement : « amener croix une fois au moins en deux coups » comme la réunion de deux événements. Lesquels ?

Travaux Pratiques

Jeu de fléchettes et simulation

On lance des fléchettes sur une cible carrée. Cette cible comporte également un quart de cercle, de rayon égal au côté du carré. On effectue plusieurs tirs et on dénombre les impacts se trouvant dans le quart de cercle.



1. On simule cette expérience à l'aide d'une calculatrice. Pour cela, on choisit au hasard un couple de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec x et y compris entre 0 et 1. À chaque lancer on fait le test suivant « $x^2 + y^2$ est-il inférieur à 1 ? » et on compte les coups pour lesquels c'est réalisé.
Voici des programmes permettant de réaliser cette simulation :

Ti 82-83	Commentaires	Casio 25-35-65-100
Input N	*Entrer le nombre de lancers*	? → N ↵
0 → A		0 → A ↵
For(I,1,N)	*Début de la boucle*	For 1 → I To N ↵
Rand → X	*Choisir au hasard un couple (X ; Y)*	Ran # → X ↵
Rand → Y		Ran # → Y ↵
If $X^2 + Y^2 < 1$	*Tester si l'impact est à l'intérieur du quart*	If $X^2 + Y^2 < 1$ ↵
Then	*de cercle*	Then ↵
A+1 → A	*Calculer le nombre d'impacts à l'intérieur*	A+1 → A ↵
End		Next ↵
A/N → F		Next ↵
Disp F	*Calculer la fréquence des impacts*	A/N → F ↵
End		Disp F ↵

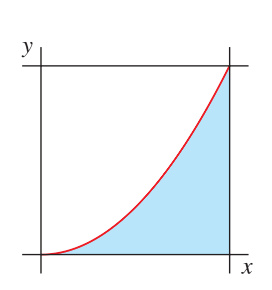
a. Simuler une série de 100 lancers.
Quelle est la fréquence observée ?

b. Recommencer une simulation de quatre séries de lancers. Noter les fréquences obtenues.
Quelle est la fréquence observée pour les 500 lancers ?

2. Calculer le rapport $\dfrac{\text{aire du quart de cercle}}{\text{aire du carré}}$.

Comparer ce rapport à la fréquence observée.
On observe que lorsque le nombre de lancers devient très grand la fréquence devient » très proche » de $\frac{\pi}{4}$. Cette méthode, appelée Méthode de Monte Carlo permet d'obtenir une approximation de l'aire du quart de disque.

3. On se propose d'appliquer cette méthode à l'estimation de l'aire de la partie du plan coloriée située sous la parabole d'équation $y = x^2$ et dans le carré de côté 1.



a. Comment modifier le programme précédent pour réaliser une simulation de lancers de fléchettes avec cette nouvelle cible ?

b. Simuler une série de 500 lancers. En déduire une approximation de l'aire sous la parabole.

Travaux Pratiques

Les anniversaires

On se propose de déterminer la probabilité pour que deux élèves au moins, d'une classe de 28 élèves, fêtent leur anniversaire le même jour (aucun n'étant né un 29 février !).

On suppose que quelque soit le jour de l'année, la probabilité qu'un élève, choisi au hasard, fête son anniversaire ce jour-là est égale à $\frac{1}{365}$. On peut penser que la probabilité cherchée est égale à $\frac{28}{365}$ soit 0,077 environ.

Pour vérifier cette hypothèse, on va réaliser une simulation à l'aide d'un tableur.

1 Simulation

Chaque élève est numéroté de 1 à 28 et chaque jour de l'année de 1 à 365.

Il s'agit donc de choisir 28 nombres au hasard parmi les entiers de 1 à 365 et de déterminer les coïncidences des résultats obtenus. Ouvrir une feuille de calcul.

Dans les colonnes A et C, écrire respectivement les entiers de 1 à 28 et les entiers de 1 à 365.

La colonne B associe à chaque élève son jour anniversaire obtenu par tirage au hasard d'un entier de 1 à 365. Écrire dans B3 la formule = ENT (ALEA ()*365+1). Recopier cette formule, vers le bas, jusqu'en B30.

Dans la colonne D, on compte pour chaque jour de l'année, le nombre de fois où ce jour est une date anniversaire d'un élève de la classe.

On écrit dans la cellule D3 la formule = NB.SI($B$3 :$B$30 ; C3), puis recopier en bas.

Il y a coïncidence, un jour donné, si le nombre d'élèves fêtant leur anniversaire ce jour-là est supérieur strictement à 1. Pour chaque jour, le test est effectué au moyen de la formule = SI(D3 > 1 ; 1 ; 0), qui est écrite dans la cellule E3 puis recopiée en bas.

La somme des entiers de la colonne E fournit le nombre de coïncidences qui est écrit dans la cellule F3 au moyen de la formule = SOMME (E3 :E367).

Expliquer pourquoi la formule = SI ($F$3=0 ; « NON » ; « OUI »), écrite dans la cellule G3, fournit la réponse pour l'échantillon observé :

D3 = =NB.SI($B$3:$B$30;C3)

	A	B	C	D	E	F	G
1	numéro de	jour de	jour de			nombre de	Deux élèves au moins, ont-ils
2	l'élève	naissance	l'année			coïncidence	le même jour anniversaire ?
3	1	134	1	0	0	2	OUI
4	2	292	2	0	0		

Effectuer 100 simulations. Quelle est la fréquence des « OUI » ? Le résultat obtenu est-il en accord avec l'hypothèse faite d'une probabilité de 0,077 environ ?

2 Calcul de probabilités

On considère maintenant des groupes de n personnes. On note p_n la probabilité pour que, ces n personnes aient des dates anniversaires différentes.

a. On choisit $n = 3$. Quelle est la probabilité pour que deux personnes parmi ces trois fêtent leur anniversaire le même jour ?

b. Justifier l'égalité $p_{n+1} = p_n \times \frac{365 - n}{365}$. On pose $p_1 = 1$.

Exprimer en fonction de p_n, la probabilité q_n, pour que parmi ces n personnes, d'eux d'entre elles au moins fêtent leur anniversaire le même jour.

c. Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer q_{28}.

Comparer avec l'étude faite dans la question **1. b**. Conclure.

Et maintenant,
TESTEZ-VOUS !

Choisissez la (ou les) bonne(s) réponse(s).

A. Savez-vous calculer une probabilité ?

On lance deux dés bien équilibrés et on note les résultats obtenus.

	A	B	C	D
1. La probabilité d'obtenir deux nombres identiques est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
2. La probabilité d'obtenir une somme égale à 10 est	$\frac{1}{11}$	égale à la probabilité d'obtenir une somme égale à 4	$\frac{1}{12}$	supérieure à la probabilité d'obtenir une somme égale à 7
3. La probabilité d'obtenir un produit égal à un nombre pair est	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
4. La probabilité d'obtenir une somme égale à un nombre premier est	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$
5. La probabilité d'obtenir un double six est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

B. Savez-vous utiliser des probabilités ?

A, *B* et *C* sont trois événements de l'ensemble Ω muni de la loi de probabilité *P*.

On sait que $P(A) = 0{,}35$; $P(\overline{B}) = 0{,}55$; $P(A \cap C) = 0$ et $P(A \cap B) = 0{,}15$.

6. $P(\overline{A}) =$	0,65	0,5	0,25	0,55
7. $P(A \cup B) =$	0,75	0,80	0,65	0,90
8. On a $P(C)$	égale à 0,65	inférieure à 0,65	supérieure à 0,65	On ne peut rien affirmer pour $P(C)$
9. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) =$	0,3575	0,35	0,15	0,85

C. Savez-vous utiliser la loi de probabilité d'une variable aléatoire ?

Un sac contient trois boules rouges et deux boules vertes. On tire au hasard une boule du sac. On note sa couleur et on la remet dans le sac. On tire une deuxième boule et on note sa couleur.

Chaque boule rouge tirée rapporte 2 euros. Chaque boule verte fait perdre 1 euro. Soit *X* la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue de deux tirages

10. $P(X = 1) =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{2}$
11. $E(X) =$	1,6	1	0	1,8
12. $V(X) =$	6,88	4,32	0,3088	2,08

Réponses page 351